Alcune osservazioni sulla normale ad una superficie.

Supponiamo di avere una funzione con derivate parziali continue $F(\underline{x}) = F(x, y, z)$ e consideriamo l'equazione $\partial D \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon F(\underline{x}) = 0\}$. Supponiamo che $\underline{\partial} F(\underline{x}) \neq \underline{0}$ per ogni $\underline{x} \in \partial D$. Sia $D \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon F(\underline{x}) < 0\}$ (D è aperto).

Allora il vettore $\frac{\underline{\partial} F(\underline{x})}{\|\underline{\partial} F(\underline{x})\|}$ con $\underline{x} \in \partial D$ è normale a D ed è diretto verso l'esterno della superficie definita da ∂D (perché? Offro due punti a chi entro domani alle 23.00 scrive la risposta giusta) la quale può essere limitata oppure illimitata.

Ad esempio prendiamo $F(\underline{x}) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. $F(\underline{x}) = 0$ definisce la superficie sferica e la disuguaglianza $F(\underline{x}) < 0$ definisce l'inteno della sfera. Chiaramente si ha $\frac{\underline{\partial} F(\underline{x})}{\|\underline{\partial} F(\underline{x})\|} = \frac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|}$ dove $\underline{r} = (x, y, z)$.

Se $F\underline{x}) = x^2 + y^2 - z$ allora l'equazione $z = x^2 + y^2$ definisce un paraboloide e $x^2 + y^2 - z \leq 0$ definisce l'interno del paraboloide. $\frac{\underline{\partial} F(\underline{x})}{\|\underline{\partial} F(\underline{x})\|} = \frac{2x, 2y, -1}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}}$ ed essendo la terza componente negativa, la normale punta verso il basso.

Questa descrizione va bene se le coordinate che si usano sono cartesiane. Se si pararmetrizza una superficie con altre coordinate allora bisogna scrivere $\underline{n} = \frac{\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v}{\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|}$ oppure $\underline{n} = -\frac{\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v}{\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|} = \frac{\underline{\varphi}_v \wedge \underline{\varphi}_u}{\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|}$. Quale è la normale esterna va deciso a posteriori.